Matematici Aplicate în Economie

Ecuaţi liniare. Funcţii reale

TEMA 1

(1) Fie dreptele $-26x+7y=-56$, $\frac{1}{4}x+17y=-8$, $6x-13y=126$, $-5x-\frac{1}{2}y=55$, $-13x+19y=-39$. Găsiţi pantele şi interpretaţi rezultatele. Aflaţi punctele de intersecţie cu axele de coordonate.

Răspuns. $m_1=\frac{26}{7}, A\left(\frac{28}{13},0\right), B(0,-8)$, $m_2=-\frac{1}{68}, A(-32,0), B\left(0,-\frac{8}{17}\right)$, $m_3=\frac{6}{13}$, $A(21,0), B\left(0,-\frac{126}{13}\right)$, $m_4=-10, A(-11,0), B(0,-110)$, $m_5=\frac{13}{19}, A\left(\frac{39}{13},0\right), B\left(0,-\frac{39}{19}\right)$

(2) Scrieţi ecuaţiile dreptelor pentru care folosim formula "punct-pantă": m=3 şi $(8,-5)\in$ dr., m=1/2 şi $(-10,12)\in$ dr., m=-5 şi $(3,-11)\in$ dr., m=4/9 şi $(0,-6)\in$ dr., m=-2/3 şi $(0,49)\in$ dr., m=23.5 şi $(0,-70)\in$ dr.

Răspuns. $y=3x-29$, $y=\frac{x}{2}+17$, $y=-5x+4$, $y=\frac{4}{9}x-6$, $y=-\frac{2}{3}x+49$, $y=23,5x-70$

(3) Scrieţi ecuaţiile dreptelor care trec prin următoarele 2 puncte: $(-1,10)$ şi $(4,-5)\in$ dr., $(-6,-3)$ şi $(9,7)\in$ dr., $(4,-5)$ şi $(10,-8)\in$ dr.

Răspuns. $y=-3x+7$, $y=\frac{2}{3}x+1$, $y=-\frac{x}{2}-3$

(4) Determinaţi valoarea maximă şi / sau minimă a funcţiilor:

a) Cost marginal $C_M(x)=200-24x+x^2$

b) Cost total $C_T(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{9}{2}x^2+14x+22$

Răspuns. $a) C_{min}=C_M(12)=56$, $b) C_{min}=C_T(7)=\frac{83}{6}$, $C_{max}=C_T(2)=\frac{104}{3}$

(5) Fie funcţia cerere în raport cu preţul unitar, iar a şi b sunt parametrii reali :

(a) $Q=\frac{a-p}{b}$

(b) $Q=\frac{a-\sqrt{p}}{b}$

(c) $Q=a\cdot\ln\frac{b}{p}$

(d) $Q=\frac{53-p^2}{75}$

(e) $Q=8p^{-12}+13$

Exprimaţi preţul în funcţie de cerere şi calculaţi valoarea marginală (derivata) acestuia.

Răspuns. $p'=-b$, $p'=-2ab+2b^2Q$, $p'=-\frac{b}{a}e^{-Q/a}$, $p'=\frac{-75}{2\sqrt{53-75Q}}$, $p'=\frac{-1}{6\sqrt[4]{8}(Q-13)\sqrt[12]{Q-13}}$

(6) Fie funcţia cerere exprimată în raport cu preţul unitar, iar a şi b sunt parametrii reali :

(a) $Q=a+b\cdot p$

(b) $Q=a\cdot e^p$

(c) $Q=\frac{ap}{b+p}$

(d) $Q=6+8p+3p^2$

(e) $Q=3\cdot\frac{2+p}{3+p}$

Calculaţi valoarea marginală a funcţiei cerere precum şi elasticitatea cererii în raport cu preţul.

Răspuns. $E_Q(p)=\frac{-pb}{a+pb}$, $E_Q(p)=-p$, $E_Q(p)=\frac{-b}{b+p}$, $E_Q(p)=\frac{-2p(4+3p)}{3p^2+8p+6}$, $E_Q(p)=\frac{-p}{(2+p)(3+p)}$

Matematici Aplicate în Economie

Funcţii de una şi mai multe variabile reale. Derivate parţiale de ordinul I

TEMA 2

(1) Fie funcţia încasării totale $R(p) = p \cdot C(p)$ unde p este preţul unitar iar C cererea. Arătaţi că:

a) dacă cererea este elastică atunci încasările totale sunt descrescătoare

b) dacă cererea este inelastică atunci încasările totale sunt crescătoare

Răspuns. Indiciu: Exprimaţi derivata $R'(p)$ în funcţie de elasticitate $E_c(p)$:

$$R'(p) = p \cdot C'(p) + C(p) = C(p)\left(1 + \frac{p \cdot C'(p)}{C(p)}\right) = C(p)\left(1 - E_c(p)\right).$$

Discuţie după semnul lui $R'(p)$.

(2) Fie funcţia cerere în raport cu preţul $C(p) = 500 - 2p$.

a) Determinaţi $E_C(5)$. Este cererea elastică sau inelastică în acest caz ?

b) Unde cererea este elastică respectiv inelastică în raport cu preţul ?

c) Care sunt intervalele de monotonie ale funcţiei încasării totale (vezi problema 1) şi respectiv valoarea sa maximă ?

Răspuns.

a) $E_C(5) < 1$ prin urmare cererea este inelastică în acest caz.

b) Pentru $p > 125$ avem cerere elastică, pentru $p < 125$ inelastică iar pentru $p = 125$ avem elasticitate unitară.

c) $R(p) = 500p - 2p^2$. Se calculează $R'(p)$ şi respectiv $R''(p)$. Se obţine $R_{max} = R(125) = 31250$.

(3) Calculaţi derivatele parţiale de ordinul întâi pentru funcţiile de mai jos, în punctele (1,1) şi respectiv (1,1,1):

(a) $f(x,y) = 5x^2 + 3y^3$ **Răspuns:** 10, 9

(b) $f(x,y) = 3x^4 - 5x^2y^3 - 4x^3y^2 - 3y^2 + 4x + 3y + 1$ **Răspuns:** -6, -26

(c) $f(p,q) = 4p^3q^2$ **Răspuns:** 12, 8

(d) $f(k,l) = 4\sqrt{k}l^3$ **Răspuns:** 2, 12

(e) $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$ **Răspuns:** 1/2, -1/2

(f) $f(p,q) = \dfrac{p^2+q^2}{pq}$ **Răspuns:** 0, 0

(g) $f(x,y) = \sqrt{xy^3} + \dfrac{2}{x}$ **Răspuns:** -3/2, 3/2

(h) $f(s,t) = \dfrac{s+t}{3t} - \dfrac{2s+t^2}{\sqrt{s}}$ **Răspuns:** -1/6, -7/3

(i) $f(x,y) = \ln\left(y + \sqrt{x^2+y^2}\right)$ **Răspuns:** $\dfrac{1}{\sqrt{2}+2}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

(j) $f(x,y,z) = 3x^2 + 2xy + y^2 - 3yz + xz^2 + z^3$ **Răspuns:** 9, 1, 2

(k) $f(x,y,z) = x^y + y^z$ **Răspuns:** 1, 1, 0

(l) $f(p,q,r) = pqr$ **Răspuns:** 1, 1, 1

(m) $f(x,y,z) = 3x^3\sqrt{y^3}z^2$ **Răspuns:** 9, 9/2, 6

(n) $f(r,s,t) = \dfrac{r}{s} + \dfrac{s}{t} + \dfrac{t}{r}$ **Răspuns:** 0, 0, 0

(4) Determinaţi productivităţile marginale pentru următoarele funcţii de producţie în punctul $(1,1,2)$:

(a) $f(x,y,z) = 3x^2y^4z^3$

(b) $f(p,q,r) = 4p^2\sqrt{q}r$

(c) $f(x,y,z) = 2x + y - 5z$

Răspuns. a) 48,96,36; b) 8,4,4; c) 2,1,-5

Matematici Aplicate în Economie

Derivate parţiale. Diferenţiale

TEMA 3

(1) Calculaţi derivatele parţiale de ordinul 1, 2 şi 3 pentru funcţiile de mai jos. Calculaţi de asemenea valorile lor în punctele precizate.

(a) $f(x,y) = 2x^2y^4$, $a = (-2,2)$ **Răspuns:** (-128,256), (64,384,-256), (0,384,128,-384)

(b) $f(x,y) = 2\sqrt{x}y$, $a = (1,1)$ **Răspuns:** (1,1), (-1/2,-1/2,1/2), (3/4,3/4,-1/4,-1/4)

(c) $f(x,y) = 3x^5 - 2xy^2 + y^3$, $a = (2,1)$ **Răspuns:** (238,-5), (480,-2,-4), (720,6,0,-4)

(d) $f(x,y) = x^3y + xy^3$, $a = (-1,1)$ **Răspuns:** (4,-4), (-6,-6,3), (6,-6,-6,6)

(e) $f(x,y) = \dfrac{2x}{y} - \dfrac{y}{\sqrt{x}}$, $a = (1,1)$ **Răspuns:** (5/2,-3), (-1/2,4,-3/2), (5/4,-12,-1/2,4)

(f) $f(x,y) = y\ln x$, $a = (e,1)$ **Răspuns:** $(1/e,1), (-1/e^2,0,1/e), (2/e^3,0,-1/e^2,0)$

(g) $f(x,y,z) = 3x^2y + 5xyz^2 - 2y^3z^2$, $a = (1,1,2)$ **Răspuns:** (26,-1,12), (6,-48,6,26,20,-4), (0,-48,0,6,0,0,-48,10,-38)

(h) $f(x,y,z) = y \cdot e^x + z^2 \cdot e^y$, $a = (1,1,1)$ **Răspuns:** (e,2e,2e), (e,e,2e), (e,e,0,e,0,0,2e,0,2e)

(2) Calculaţi derivatele parţiale specificate pentru funcţiile de mai jos:

(a) $f(x,y) = xy^3e^y$, $f''_{y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ **Răspuns:** $xy(6+6y+y^2)e^y$

(b) $f(p,q) = 3p^3q^2$, $f''_{p^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial p^2}$ **Răspuns:** $18pq^2$

(c) $f(k,l) = 5\sqrt{k}l^3$, $f''_{kl} = \frac{\partial^2 f}{\partial k \partial l}$ **Răspuns:** $15l^2/2\sqrt{k}$

(d) $f(s,t) = \dfrac{2s-t}{s+2t}$, $f'''_{s^2t} = \frac{\partial^3 f}{\partial s^2 \partial t}$ **Răspuns:** $10(4t-s)/(s+2t)^4$

(e) $f(p,q) = \dfrac{p^2+q^2}{pq}$, $f''_{qp} = \frac{\partial^2 f}{\partial q \partial p}$ **Răspuns:** $-(p^2+q^2)/p^2q^2$

(f) $f(x,y,z) = 2x + y - 5z$, $f'''_{z^2y} = \frac{\partial^3 f}{\partial z^2 \partial y}$ **Răspuns:** 0

(g) $f(r,s,t) = \ln\left(\dfrac{r}{s}\right) + \ln\left(\dfrac{s}{t}\right) + \ln\left(\dfrac{t}{r}\right)$, $f'''_{rst} = \frac{\partial^3 f}{\partial r \partial s \partial t}$ **Răspuns:** 0

(3) Scrieţi expresiile diferenţialelor de ordinul întâi şi doi pentru următoarele funcţii. Calculaţi de asemenea expresiile diferenţialelor găsite în punctele indicate.

(a) $f(x,y) = x^2\ln y$, $a = (2,5)$, $h = (3,4)$

(b) $f(x,y) = x^2y + xe^y$, $a = (-1,-2)$, $h = (1,1)$

(c) $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{x^2+y^3}}{x-y}$, $a = (1,2)$, $h = (2,3)$

(d) $f(x,y,z) = 7x^3y^2z^5$ $a = (3,2,1)$, $h = (5,3,1)$

(e) $f(x,y,z) = \ln(x^2y^3 - z^2x)$ $a = (2,2,2)$, $h = (1,1,1)$

Răspuns:

(a) $df_{(2,5)}(3,4) = 12\ln 5 + \dfrac{16}{5}$, $d^2f_{(2,5)}(3,4) = 18\ln 5 + \dfrac{416}{25}$

(b) $df_{(-1,-2)}(1,1) = 5$, $d^2f_{(-1,-2)}(1,1) = \dfrac{1}{e^2} - 8$

(c) $df_{(1,2)}(2,3) = -\dfrac{11}{3}$, $d^2f_{(1,2)}(2,3) = \dfrac{177}{6}$

(d) $df_{(3,2,1)}(5,3,1) = 9828$, $d^2f_{(3,2,1)}(5,3,1) = 114282$

(e) $df_{(2,2,2)}(1,1,1) = \dfrac{77}{30}$, $d^2f_{(2,2,2)}(1,1,1) = -\dfrac{167}{100}$

Matematici Aplicate în Economie

Extreme

TEMA 4

(1) O fabrică produce două tipuri de bunuri. Costul producerii acestor bunuri este dat prin funcţia $f(x, y)$, unde x şi y reprezintă cantităţile produse din fiecare tip de produs. Să se minimizeze costul atunci când $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy + 10$.

Răspuns: $f_{min} = f(1, 1) = 9$

(2) O fabrică produce trei tipuri de bunuri în cantităţile x, y şi z. Să se calculeze pentru ce valori ale acestor cantităţi, se obţine profitul maxim, dacă profitul este dat prin următoarea funcţie $f(x, y, z) = x\, y^2\, z^3\, (14 - x - 2y - 3z)\,,\ x\, y\, z \neq 0$.

Răspuns: $f_{max} = f(2, 2, 2) = 128$ Indiciu: desfaceţi parantezele, derivaţi iar apoi în expresia derivatelor parţiale daţi din nou factor comun şi după egalarea cu 0, simplificaţi.

(3) Găsiţi extremele funcţiilor de mai jos:

(a) $f(x, y) = 2x^2 + 6xy + 5y^2 + 2x + 8y + 6$ **Răspuns:** $f_{min} = f(7, -5) = -7$

(b) $f(x, y) = -3x^2 + 4xy - 4y^2 + 4x - 4y - 5$ **Răspuns:** $f_{max} = f(1/2, -1/4) = -7/2$

(c) $f(x, y) = x^3y^2(36 - x - y), \quad xy \neq 0$ **Răspuns:** $f_{max} = f(18, 12) = 5.038.848$

(d) $f(x, y) = xy + \dfrac{64}{x} - \dfrac{8}{y} \quad x, y \neq 0$ **Răspuns:** $f_{max} = f(-8, 1) = -24$

(e) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z$ **Răspuns:** $f_{min} = f(-1, -2, 3) = -14$

(4) O bancă oferă persoanelor fizice credite în valoare de 5000 u.m., 10000 u.m. şi respectiv 50000 u.m. Pentru C_1 credite de 5000 u.m. contractate, banca obţine un beneficiu de $200 - 3C_1$ u.m./credit. Pentru C_2 credite de 10000 u.m. contractate, beneficiul băncii este $500 - 7C_2$ u.m./credit. Contractarea unui număr de C_3 credite de 50000 u.m. aduce băncii un beneficiu de $560 - 4C_3$ u.m./credit. În cazul rambursărilor anticipate a creditelor contractate, pentru C credite lichidate înainte de termenul scadent, pierderile băncii sunt estimate la $450 + 80C$ u.m. Care ar fi numărul optim de credite contractate, de fiecare tip, astfel ca beneficiul băncii să fie maxim şi care ar fi acest beneficiu ?

Răspuns: $f_{max} = f(20, 30, 60) = 21.450$ u.m.

Indiciu: Beneficiul total = Diferenţa între beneficiile pe fiecare tip de credit în parte şi pierderile aferente

$$f(c_1, c_2, c_3) = c_1(200 - 3c_1) + c_2(500 - 7c_2) + c_3(560 - 4c_3) - 450 - 80(c_1 + c_2 + c_3)$$

(5) În decursul unui an, valorile totale ale importurilor şi exporturilor unei ţări, pentru un tip de produs importat şi două tipuri de produse exportate, au fost estimate prin funcţiile $I : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $E : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definite prin

Importuri (u.m.)	$I(x) = -2x^3 + 15x^2 - 36x + 237$
Exporturi (u.m.)	$E(y, z) = 2y^3 + 2z^3 - 15y^2 - 21z^2 + 24y + 72z + 365$

Să se determine cantităţile din cele trei tipuri de produse pentru care, la sfârşitul anului, balanţa comercială are valoarea maximă şi să se precizeze această valoare.

Răspuns: $f_{max} = f(2, 1, 3) = 248$ u.m.

Indiciu: Balanţa comercială = Valoarea exporturilor - valoarea importurilor

Matematici Aplicate în Economie

Extreme condiţionate (legate)

TEMA 5

(1) Să se determine punctele de extrem local legat pentru funcţiile de mai jos:

(a) $f(x,y) = 3xy - x^3 - y^3$ pentru orice $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, cu legătura $x + y = 2$

(b) $f(x,y) = x^2 + y^2 - 3x - 4y + 3$ pentru orice $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, cu legătura $x + 2y = 3$

(c) $f(x,y) = x + 2y$ pentru orice $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, cu legătura $x^2 - y^2 = -3$

(d) $f(x,y,z) = xy + xz + yz$ pentru orice $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, cu legătura $xyz = 1$, ştiind că $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$

(e) $f(x,y,z) = 2x + y - 2z$ pentru orice $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, cu legătura $x^2 + y^2 + z^2 = 9$

(f) $f(x,y,z) = xyz$ pentru orice $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, cu legătura $xy + yz + zx = 12$.

Răspuns:

(a) $f_{max} = f(1,1) = 1$

(b) $f_{min} = f(1,1) = -2$

(c) $f_{max} = f(1,-2) = -3$, $f_{min} = f(-1,2) = 3$

(d) $f_{min} = f(1,1,1) = 3$

(e) $f_{max} = f(2,1,-2) = 9, \quad f_{min} = f(-2,-1,2) = -9$

(f) $f_{max} = f(2,2,2) = 8, \quad f_{min} = f(-2,-2,-2) = -8$

(2) Interiorul unei săli de cinema urmează să fie izolat fonic. În planul de izolare al sălii se urmăreşte folosirea unei cantităţi minime de material izolant, podeaua sălii fiind exclusă izolării fonice. Să se determine dimensiunile sălii de cinema dacă volumul ei este de 4000 m^3.

Răspuns: $C_{min} = f(20,20,10) = 1200$ u.m.

Indiciu: $f(x,y,z) = xy + 2yz + 2xz$ cu legătura $xyz = 4000$.

(3) O intreprindere produce o cantitate Q de produse utilizând capitalul K şi forţa de muncă L. Funcţia de producţie este

$$Q = F(K,L) = K^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{4}}.$$

Preţul unităţii de capital este 500 lei, iar preţul unităţii de forţă de muncă este 400 lei. Se cere să se determine acele valori ale lui K şi L care minimalizează cheltuielile ştiind că disponibilul pentru producţie este de 5.000 bucăţi .

Răspuns: $C_{min} = f(10^5, 5^4 \cdot 10^2) = 75.000.000$ u.m.

Indiciu: $f(K,L) = 500K + 400L$ cu legătura $K^{1/2}L^{1/4} = 5000$.

(4) Să se determine punctele de extrem local legat pentru funcţia $f(x,y,z) = x + y + z$ pentru orice $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$, cu legătura $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$.

Răspuns: $f_{min} = f(3,3,3) = 9$ u.m.

(5) Să se determine punctele de extrem local legat pentru funcţia $f(x,y,z) = x + y + z$ pentru orice $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, cu legăturile $x - y + z = 2$ şi $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

Răspuns: $f_{max} = f(4/3, 2/3, 4/3) = 10/3, \quad f_{min} = f(0,-2,0) = -2$

(6) Să se determine punctele de extrem local legat pentru funcţia $f(x,y,z) = xyz$ pentru orice $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, cu legăturile $x + y + z = 5$ şi $xy + yz + zx = 8$.

Răspuns: $f_{max} = f(4/3,4/3,7/3) = f(7/3,4/3,4/3) = f(4/3,7/3,4/3) = 112/27, \quad f_{min} = f(2,2,1) = f(2,1,2) = f(1,2,2) = 4$

Matematici Aplicate în Economie

Ajustarea datelor experimentale

TEMA 6

(1) Media temperaturilor înregistrate în luniile aprilie, mai şi iunie a fost de 15°, 20° şi respectiv 23°. Care va fi prognoza pentru luna august având în vedere că cercetătorii au observat o creştere liniară (ajustare printr-o dreaptă) a temperaturii până la începutul lunii septembrie.

Răspuns: $y = -2/3 + 4x, \quad y = f(8) = 31,3^\circ$

Indiciu: Pentru simplificarea calculelor setăm $aprilie := 4$. Atunci $mai := 5$ şi $iunie := 6$.

(2) O companie producătoare de ciocolată a determinat date referitoare la cota de piaţă şi respectiv preţul de vânzare pe kilogram al ciocolatei timp de patru luni consecutive. S-au obţinut astfel următoarele rezultate:

Preţ pe kg (euro)	4,5	5,2	4,7	4,9
Cota de piaţă	10	8	8,9	9,1

Să se ajusteze aceste date numerice printr-o dreaptă. Presupunând că în luna a 5-a preţul pe kg este $x = 2$ să se găsească cota de piaţă y. **Răspuns:** $y = 21,25 - 2,54x, \quad y = f(2) = 16,17$

(3) În urma unui studiu privind cererea unor produse de primă necesitate, s-au obţinut următoarele date pentru venitul x al unei persoane şi cererea y a produselor respective:

Venit (mii Dolari)	1	2	4	8
Cerere (mii Dolari)	0,4	1	1,6	2

Să se ajusteze aceste date print-o dreaptă. **Răspuns:** $y = 0,46 + 0,21x$

(4) Profitul înregistrat de către o firmă în anul 2004 este de 5,1 milioane euro, în anul 2007 este de 8,3 milioane euro, iar în anul 2009 este de 2,3 milioane euro. Să se ajusteze aceste valori printr-o dreaptă, respectiv printr-o parabolă şi să se calculeze previziunea profitului pentru anul 2012 şi 2013 (în ambele cazuri).

Răspuns: $y = 5,52 - 0,43x, \quad f(6) = 1,43, f(7) = 0,76$; $y = 8,86 + 0,25x - 0,81x^2, \quad f(6) = -18,8, f(7) = -29,08$. Indiciu: Pentru simplificarea calculelor setăm $2006 := 0$. Atunci $2004 := -2$, $2009 := 3$, $2012 := 6$ şi $2013 := 7$.

(5) Numărul calculatoarelor vândute lunar de către o firmă este dat în tabelul de mai jos.

luna	ianuarie	martie	aprilie
nr.calc.	30	45	50

Să se ajusteze printr-o dreaptă, respectiv printr-o parabolă, datele de mai sus şi să se preconizeze numărul de calculatoare ce urmează a fi vândute în luna septembrie şi decembrie (pentru fiecare caz în parte).

Răspuns: $y = 24,1 + 6,7x, f(9) \approx 84, f(12) \approx 105$; $y = 20 + 10,83x - 0,83x^2, f(9) \approx 50, f(12) \approx 30$

(6) Se consideră următoarele date numerice:

x	1	3	4	5	6
y	1	9	19	33	51

Să se ajusteze datele numerice printr-o dreaptă, respectiv o parabolă, iar apoi să se găsească valoarea lui y din punctul $x = 8$.

Răspuns: $y = -14,75 + 9,83x, \quad f(8) = 63,89; \quad y = 3 - 4x + 2x^2, \quad f(8) = 99$

Matematici Aplicate în Economie

Integrale euleriene

TEMA 7

(1) Să se calculeze valorile funcţiilor gama şi beta de mai jos:

a) $\Gamma(7)$; b) $\Gamma(\log_2 32)$; c) $B(1,1)$; d) $B(3,6)$;

e) $\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)$; f) $B\left(\frac{1}{6},\frac{11}{6}\right)$; g) $B\left(\frac{1}{\sqrt{2}},3\right)$; h) $B\left(4,\frac{\pi}{2}\right)$;

i) $B\left(B\left(2,\frac{1}{2}\right),2\right)$; j) $B\left(\frac{n+1}{n},\frac{n-1}{n}\right)$, $n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$;

Răspuns: $720, 24, 1, \frac{1}{168}, \pi\sqrt{2}, \frac{5\pi}{3}, \frac{20\sqrt{2}-24}{7}, \frac{96}{\pi(2+\pi)(4+\pi)(6+\pi)}, \frac{9}{28}, \frac{\pi}{n\cdot\sin\frac{\pi}{n}}$

(2) Folosind proprietăţile funcţiilor gama şi beta, calculaţi:

a) $B\left(4,\frac{1}{6}\right)+3\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)$; b) $B\left(\frac{1}{4},\frac{15}{4}\right)+2\Gamma(3)-\Gamma(4)$

Răspuns: $\frac{7776}{1729}+\frac{45\sqrt{\pi}}{8}, \frac{77\sqrt{2}\pi-256}{128}$

(3) Folosind proprietăţile integralelor euleriene, să se calculeze următoarele integrale:

1) $\int_0^1 \sqrt{x}(x-1)^2dx$; 2) $\int_0^1 \frac{x-1}{\sqrt{x}}dx$; 3) $\int_0^1 \frac{(x-1)^3}{\sqrt[4]{x}}dx$; 4) $\int_0^1 \frac{1-x^2}{\sqrt{x}}dx$; 5) $\int_0^1 \frac{1+2x+3x^2}{\sqrt{1-x}}dx$;

6) $\int_0^1 (x+1)^2\sqrt[3]{1-x}dx$; 7) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[99]{x-1}}$; 8) $\int_0^1 \frac{\sqrt{1-x}+\sqrt[3]{x-1}}{x-1}dx$; 9) $\int_0^1 (1-\frac{1}{x})\sqrt{x}dx$;

10) $\int_0^1 x^2\sqrt{\frac{x}{1-x}}dx$; 11) $\int_0^1 x\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)^4dx$; 12) $\int_{-1}^0 \sqrt[3]{x}(x+1)dx$; 13) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{(2x-1)^3}{\sqrt[3]{4x}}dx$;

14) $\int_{-\frac{1}{2}}^0 \frac{x}{\sqrt{2x+1}}dx$; 15) $\int_0^{\frac{1}{3}} \sqrt{x-3x^2}dx$; 16) $\int_1^\infty \frac{\sqrt[3]{x-1}}{x^2}dx$; 17) $\int_0^3 x\sqrt{\frac{x}{3-x}}dx$; 18) $\int_{-1}^0 \frac{x}{\sqrt[3]{x+1}}dx$;

19) $\int_{-2}^\infty \frac{x+1}{\sqrt[3]{e^{x+2}}}dx$; 20) $\int_1^2 \frac{x-2}{\sqrt[4]{x-1}}dx$; 21) $\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x}dx$; 22) $\int_0^\infty \frac{x^2+x+1}{e^x}dx$; 23) $\int_0^\infty xe^{-\sqrt{2}x}dx$;

24) $\int_0^\infty (x+1)^2e^{-x}dx$; 25) $\int_0^\infty (x^3+1)e^{-2x+1}dx$; 26) $\int_0^\infty \frac{xe^{x-1}}{e^{3x}}dx$; 27) $\int_0^\infty x^2e^{-3x^2}dx$; 28) $\int_0^\infty \frac{x-1}{2e^x}dx$;

29) $\int_0^\infty \frac{e^x+1}{e^{2x}}dx$; 30) $\int_0^\infty \frac{e^x-x}{e^{3x}}dx$; 31) $\int_0^\infty \frac{e^{2x}(x+1)}{e^{3x+2}}dx$; 32) $\int_0^\infty x^3e^{-3x+1}dx$;

33) $\int_0^\infty xe^{-(x+3)}dx$; 34) $\int_{-3}^\infty xe^{-(x+3)}dx$; 35) $\int_1^\infty x^2e^{-\frac{x-1}{4}}dx$.

Răspuns: (1)$\frac{16}{105}$, (2)$-\frac{4}{3}$, (3)$\frac{512}{1155}$, (4)$\frac{8}{5}$ $(x=\sqrt{t})$, (5)$\frac{118}{15}$, (6)$\frac{111}{70}$, (7)$-\frac{99}{98}$, (8)1, (9)$-\frac{4}{3}$, (10)$\frac{5\pi}{16}$, (11)$\frac{1}{315}$ $(\sqrt{x}=t)$, (12)$-\frac{9}{28}$ $(x+1=t)$, (13)$-\frac{3^5}{880\sqrt{32}}$ $(2x=t)$, (14)$-\frac{1}{3}$ $(2x+1=t)$, (15)$\frac{\sqrt{3}}{72}$ $(3x=t)$, (16)$\frac{2\pi\sqrt{3}}{9}$ $(1/x=t)$, (17)$\frac{27\pi}{8}$ $(x/3=t)$, (18)$-\frac{9}{10}$ $(x+1=t)$, (19)6 $\left(\frac{x+2}{3}=t\right)$, (20)$-\frac{16}{21}$ $(x-1=t)$, (21)6, (22)4, (23)1/2 $(\sqrt{2}x=t)$, (24)5, (25)$\frac{7e}{8}$ $(2x=t)$, (26)$\frac{1}{4e}$ $(2x=t)$, (27)$\frac{\sqrt{3}\pi}{36}$ $(3x^2=t)$, (28)0, (29)$\frac{3}{2}$, (30)$\frac{7}{18}$, (31)$\frac{2}{e^2}$, (32)$\frac{2e}{27}$ $(3x=t)$, (33)$\frac{1}{e^3}$, (34)$-2(x+3=t)$, (35)164 $\left(\frac{x-1}{4}=t\right)$